

## Aufgaben zu Geraden

1.0 Gegeben sind die Geraden  $g_1$ ,  $g_2$  und  $g_3$  mit den Gleichungen:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.1 Bestimmen Sie die Lage von  $g_1$  und  $g_2$  zueinander.

1.2 Bestimmen Sie die Lage von  $g_1$  und  $g_3$  zueinander.

1.3 Bestimmen Sie die Lage von  $g_2$  und  $g_3$  zueinander.

2 Zeigen Sie, dass die Geraden  $g$  und  $h$  identisch sind.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

3 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden  $g$  und  $h$  durch die Punkte A, B bzw. C, D auf und untersuchen Sie anschließend, welche Lage die Geraden zueinander haben.

A(3,5/5,5/0), B(3,5/5,5/8), C(5/3,5/0) und D(6,5/1,5/-8)

4 Zeigen Sie, dass die Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

nicht parallel sind. Bestimmen Sie den Wert von  $a$ , für den sich die Geraden schneiden.

5.0 Bestimmen Sie, welche besondere Lage die Geraden  $g_1$ ,  $g_2$  und  $g_3$  im Koordinatensystem haben.

5.1  $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

5.2  $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

5.3  $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

5.4  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$

$$5.5 \quad \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$5.6 \quad \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$5.7 \quad \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

6.0 Ermitteln Sie, für welchen Wert von  $a$  die Geraden  $g$  und  $h_a$  parallel sind und für welchen Wert von  $a$  sie einander schneiden.

$$6.1 \quad \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$

$$6.2 \quad \vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4-a \end{pmatrix}$$

## Lösungen

1.1  $g_1$  und  $g_2$  sind echt parallel

1.2  $g_1$  und  $g_3$  schneiden sich im Punkt  $S(3/2/-3)$

1.3  $g_2$  und  $g_3$  sind windschief zueinander

2 Richtungsvektoren sind linear abhängig und z.B. Punkt  $P(0/4/3) \in h$ ;

$$3 \text{ } g(A,B): \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } g(C,D): \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden einander im Punkt  $S(3,5/5,5/8)$ .

4 Die Geraden  $g$  und  $h_a$  sind nicht parallel, weil die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

Die Geraden schneiden sich, wenn das lineare Gleichungssystem

$$(1) \quad 6 - 4k = 1 + 5s$$

$$(2) \quad k = a + 3s$$

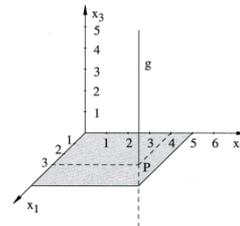
$$(3) \quad -5 + 4k = 1 - 6s$$

eine eindeutige Lösung hat; aus (1) und (3)  $\Rightarrow k = 0$  und  $s = 1$

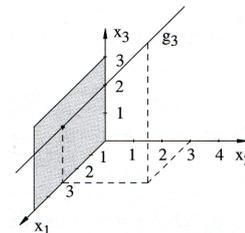
$k = 0$  und  $s = 1$  einsetzen in (2)  $\Rightarrow 0 = a + 3 \Rightarrow a = -3$ ;

Die Geraden  $g$  und  $h_{-3}$  schneiden einander im Punkt  $S(6/0/-5)$ .

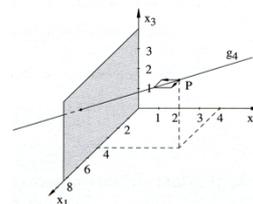
5.1 Die Gerade  $g_1$  geht durch den Punkt  $P(3/4/0)$  und ist parallel zur  $x_3$ -Achse.



5.2 Die Gerade  $g_2$  geht durch den Punkt  $(3/0/2)$  und ist parallel zur  $x_2x_3$ -Koordinatenebene.



5.3 Die Gerade  $g_3$  geht durch den Punkt  $(4/4/3)$  und ist parallel zur  $x_1x_2$ -Koordinatenebene.



5.4 Die Gerade verläuft durch den Ursprung.

5.5 Die Gerade  $g$  liegt in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.

5.6 Die Gerade  $g$  ist echt parallel zu der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene.

5.7 Die Gerade  $g$  ist echt parallel zur  $x_1$ -Achse.

6

- a) Die Geraden  $g$  und  $h_a$  sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Also:

$$\vec{u}_g = t \cdot \vec{u}_{h_a}; \quad t \in \mathbb{R}$$

oder:

$$(1) \quad 1 = -3t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \quad -1 = 3t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$(3) \quad 2 = a \cdot t$$

$$t = -\frac{1}{3} \text{ in (3) } 2 = a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow a = -6$$

Für  $a = -6$  sind die Geraden parallel.

Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$  sind die Geraden windschief. Nachweis:

$$(1) \quad 4 + k = 8 - 3r \quad \leftarrow \oplus$$

$$(2) \quad -k = 8 + 3r \quad \leftarrow \oplus$$

$$(3) \quad 6 + 2k = -8 + a \cdot r$$

Die Addition der Gleichungen (1) und (2) ergibt den Widerspruch  $4 = 16$ . Daraus folgt, dass die Geraden für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$  windschief sind.

- b) Die Geraden  $g$  und  $h_a$  sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Also:

$$\vec{u}_g = t \cdot \vec{u}_{h_a}; \quad t \in \mathbb{R}$$

oder:

$$(1) \quad 1 = a \cdot t$$

$$(2) \quad 1 = 2 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad 2 = (4 - a) \cdot t$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ in (1) } 1 = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow a = 2$$

$$a = 2 \text{ und } t = \frac{1}{2} \text{ in (3) } 2 = 2 \cdot t \Leftrightarrow t = 1$$

Ergebnis: Es gibt keinen Wert für  $a$ , sodass die Geraden parallel sind.

Wir prüfen, ob sie einen gemeinsamen Punkt haben können. Also:

$$(1) \quad 1 + k = 1 + a \cdot r$$

$$(2) \quad 1 + k = -1 + 2r \Leftrightarrow k = -2 + 2r$$

$$(3) \quad 2 + 2k = 1 + 4r - ra$$

$$(1) + (3) \quad 3 + 3k = 2 + 4r$$

$$(2) \text{ eingesetzt: } 3 + 3(-2 + 2r) = 2 + 4r$$

$$\Leftrightarrow 3 - 6 + 6r = 2 + 4r$$

$$\Leftrightarrow r = 2,5, \text{ also } k = 3$$

$$\text{In (1) } 1 + 3 = 1 + a \cdot 2,5 \Leftrightarrow a = \frac{6}{5}$$

Für  $a = \frac{6}{5}$  schneiden die Geraden einander im Punkt  $S(4|4|8)$ .

Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{6}{5} \right\}$  sind sie windschief zueinander.